UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Departamento de Computación y T. I.
Estructuras Discretas III (CI-2527)
Prof.: S, Carrasquel

Sep-Dic 2021

Práctica 03

Grupos - Subgrupos

1. Demuestre que $\langle M_n, \oplus\rangle$ es un grupo, donde $M_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ y $\oplus$ es definida por $a \oplus b = r$ donde r es el resto de dividir $a + b$ entre n y $+$ es la suma usual en $\mathbb{Z}$.

2. Sea A un conjunto de n elementos. Indique si $\langle \mathcal{P}(A), \cup\rangle$ es un grupo, si no lo es diga (con un ejemplo) cuál propiedad de grupo no satisface

3. Demuestre que todo grupo de 4 o menos elementos es abeliano

4. Sea $\langle G, \star\rangle$ un grupo, se define el conjunto de los polinomios formales en la indeterminada x con coeficientes en G, como el conjunto de las expresiones formales $a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ donde n es un número natural y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$. Es decir

   $$G[x] = \{a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \ : \ a_i \in G \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

   Los elementos de $G[x]$ se suelen denotar por $P(x)$,

   $$P(x) \in G[x] \Longleftarrow (P(x) = a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)\wedge(a_i \in G)\wedge(n \in \mathbb{N})$$

   los a_i se denominan coeficientes del polinomio y cada a_ix^i se denomina término del polinomio.
   Si a_i es el neutro de G, el término a_ix^i se suele omitir al representar al polinomio. El grado de un término es el exponente de su indeterminada y el grado de un polinomio es el exponente del término de mayor grado.
   Sobre $G[x]$ se define la siguiente operación $\oplus$ como sigue:

   $$(a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) \oplus (b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m)$$

   $$= (a_0 \star b_0) + (a_1 \star b_1)x^1 + a(_2 \star b_2)x^2 + \ldots + (a_k \star b_k)x^k$$

   donde $k = \max(m, n)$. Demuestre que

   (a) $\langle G[x], \oplus\rangle$ es un grupo
   (b) $\langle G[x], \oplus\rangle$ es abeliano si y sólo si G es abeliano

5. Sea $\langle G, *\rangle$ un grupo y $\langle H, *\rangle, \langle K, *\rangle$ subgrupos de $\langle G, *\rangle$ tales que $|H| = 38$ y $|K| = 55$. Demostrar que $H \cap K = \{e\}$.

6. Demuestre que un grupo es simétrico si y sólo si $(b \circ c)^n = b^n \circ c^n (\forall n \in \mathbb{N})$.

7. Demuestre que en un grupo $\langle G, \circ\rangle$ se satisface que $(b^m)^n = b^{mn}$.

8. Demuestre que en un grupo $\langle G, \circ\rangle$ con un número par de elementos, tiene un elemento distinto de la identidad que es su propio inverso.

9. Si $\langle G, *\rangle$ es un grupo finito de orden n ($|G| = n$), entonces $a^n = e, \forall a \in \langle G, *\rangle$.

10. Sea $< G, * >$ un grupo finito. Demuestre que $\forall a \in G$, H_a es subgrupo de G, con $H_a = \{a^k : \ k \in \mathbb{N}\}$

11. Sea G un grupo abeliano y sea $H = \{a \in G \mid a^2 = e\}$. Demuestre que H es un subgrupo de G.

12. Se denota por HK al conjunto $\{hk : \ h \in H \wedge k \in K\}$. Si G es un grupo y H, K son subgrupos de G. Entonces HK, KH son subgrupos de G, si y solo si $HK = KH$.

13. Sean A, B conjuntos, $\langle H, \star, e\rangle$ un subgrupo de $\langle G, \star, e\rangle$, tal que $A \subset H$. Demuestre que $AB \cap H = A(B \cap H)$

14. Sean $\langle H, *\rangle, \langle K, *\rangle, \langle HK, *\rangle$ y $\langle L, *\rangle$ subgrupos de $\langle G, *\rangle$. Demuestre que:

    (a) $H \cup K \subseteq HK$.

    (b) $H \cup K \subseteq L \Rightarrow HK \subseteq L$.